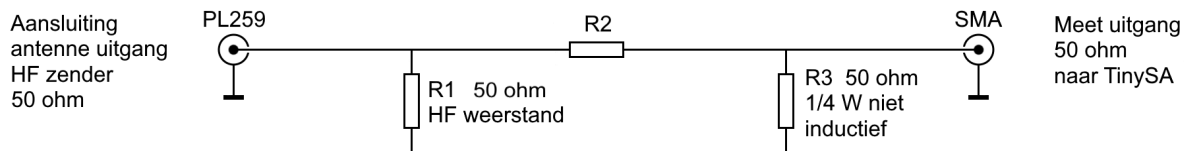


Van iteratieve berekening naar een gesloten formule.

1. Inleiding.

In het artikel [‘Voortschrijdend inzicht met de dummyload’](#) werd een dummyload beschreven met een verzwakte meetuitgang voor een **TinySA** spectrum analyzer, dit schema:



De berekening van de serieweerstand **R2** was gebaseerd op twee onderling afhankelijke formules.

De eerste formule berekent de totale belastingimpedantie **Ztotaal** van de dummyload, zoals die door de aangesloten zender wordt gezien.

De tweede formule berekent vervolgens de benodigde waarde van **R2** voor een gewenste meetverzwakking.

Omdat een verandering van **R2** de waarde van **Ztotaal** beïnvloedt, en een gewijzigde **Ztotaal** vervolgens weer leidt tot een andere waarde van **R2**, was een iteratief rekenproces noodzakelijk.

Tijdens de verdere analyse ontstond de vraag of deze iteratieve methode werkelijk noodzakelijk was, of dat beide vergelijkingen algebraïsch konden worden samengevoegd tot één gesloten formule.

Dit document beschrijft die afleiding stap voor stap.

Opmerking voor de lezer.

Wie alleen de uiteindelijke formule wil gebruiken, kan direct naar dit hoofdstuk gaan:

8. De gesloten formule.

of voor wie het daar ook nog wat te ingewikkeld vindt, meteen doorbladeren naar hoofdstuk:

9. Controle (Test Kees).

Wie wil begrijpen waarom die formule klopt, is van harte welkom om de volledige afleiding te volgen. Die is best wat langer dan de uiteindelijke formule doet vermoeden, na een 'bescheiden' hoeveelheid algebra, enkele tientallen tussenstappen, één ontsporing, een spoorherstel, twee Eureka-momenten een kop koffie en een paar glazen bier....vinden we uiteindelijk deze 'mooie glimmende enkele formule':

$$R_2 = 25 \left(\sqrt{1 + 10^{A/10}} - 2 \right)$$

De oorspronkelijke iteratieve methode.

Het uitgangspunt van de oorspronkelijke berekening was een dummyload van nominaal **50 Ω**, voorzien van een verzwakte meetuitgang voor een **TinySA** spectrum analyzer.

Het schema bestaat uit drie weerstanden:

- **R1** : de 50 Ω HF-vermogenweerstand (dummyload).
- **R2** : de te berekenen serieweerstand.
- **R3** : de 50 Ω ingang van de meetverzwakker.

De TinySA bezit eveneens een ingangsimpedantie van 50 Ω.
Daardoor ontstaan twee parallel geschakelde weerstanden van 50 Ω.

Hun vervangingsweerstand bedraagt:

$$R_{\text{parallel}} = \frac{50 \times 50}{50 + 50} = 25 \Omega$$

De complete meettak bestaat daardoor uit:

$R_2 + 25$
welke parallel staat aan de hoofdweerstand R1 van 50 Ω.

Formule 1.

Hieruit volgt direct de totale belasting die de zender ziet.
Volgens de bekende formule voor twee parallelweerstandens geldt:

$$Z_{\text{totaal}} = \frac{50 \times (R_2 + 25)}{50 + R_2 + 25}$$

of:

$$Z_{\text{totaal}} = \frac{50 \times (R_2 + 25)}{R_2 + 75}$$

Deze vergelijking werd in het oorspronkelijke artikel gebruikt als **Formule 1**.

Belangrijk gevolg.

Hieruit blijkt onmiddellijk dat de belastingimpedantie **geen constante 50 Ω meer is.**

Elke verandering van R_2 veroorzaakt immers een andere waarde van:

Z_{totaal}

Dat gegeven lijkt op het eerste gezicht misschien onbelangrijk.

In werkelijkheid vormt het precies de oorzaak van het iteratieve karakter van de gehele berekening.

Immers:

- verander R_2 ,
- dan verandert **Z_{totaal}**,

maar...

de berekening van R_2 gebruikt óók weer **Z_{totaal}**.

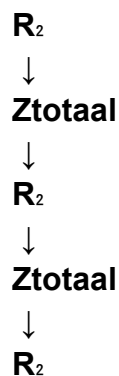
De beide vergelijkingen beïnvloeden elkaar dus wederzijds.

Waarom dit belangrijk is.

- Wanneer uitsluitend Formule 1 gebruikt zou worden, zou het probleem eenvoudig zijn.
- Wanneer uitsluitend Formule 2 gebruikt zou worden eveneens.

Maar doordat beide vergelijkingen elkaar wederzijds beïnvloeden ontstaat een gesloten lus.

Dat is schematisch weer te geven als:



Na iedere berekening verandert de invoer van de andere vergelijking weer een klein beetje.

Daardoor moest dezelfde berekening meerdere malen achter elkaar worden uitgevoerd.

Na ongeveer tien iteraties veranderden de uitkomsten praktisch niet meer en kon het proces worden beëindigd.

2. Afleiding van Formule 2.

In het vorige hoofdstuk werd afgeleid dat de totale belastingimpedantie **Z_{totaal}** afhankelijk is van de nog onbekende serieweerstand **R₂**.

De volgende stap is het bepalen van de waarde van deze weerstand bij een vooraf gekozen meetverzwakking.

Om de berekening overzichtelijk te houden wordt uitgegaan van een **fictief zendervermogen van precies 1 Watt**.

Dit heeft twee belangrijke voordelen:

- De vermenigvuldiging met het aangeboden vermogen verdwijnt uit vrijwel alle vergelijkingen.
- 1 Watt is gelijk aan 0 dBW, waardoor ook deze waarde uit de dB-berekeningen verdwijnt.

De uiteindelijke formule blijft daardoor veel overzichtelijker.

Stap 1 – De uitgangsspanning van de zender.

Volgens de vermogenswet geldt:

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Hieruit volgt:

$$U = \sqrt{P \times R}$$

Omdat gekozen is voor:

$$P = 1 \text{ Watt}$$

wordt de uitgangsspanning van de zender:

$$U_{\text{zender}} = \sqrt{Z_{\text{totaal}}}$$

Dit is de spanning die over het complete dummyload staat.

Stap 2 – Vermogen op de TinySA.

De gewenste meetverzwakking bedraagt bijvoorbeeld:

30 dB,
40 dB,
45 dB,
enzovoort.

Een demping van: A dB

betekent dat het uitgangsvermogen van de meetuitgang gelijk wordt aan:

$$P_{\text{TinySA}} = 10^{-A/10}$$

Omdat het aangeboden vermogen 1 Watt bedraagt, behoeft deze vergelijking niet meer met een extra vermogensfactor te worden vermenigvuldigd.

Stap 3 – De spanning op de TinySA.

Ook voor de TinySA geldt weer:

$$U = \sqrt{P \times R}$$

De TinySA bezit een ingangsweerstand van 50 Ω.

Daarom wordt:

$$U_{\text{TinySA}} = \sqrt{50 \times 10^{-A/10}}$$

Hiermee is de spanning op de meetuitgang bekend.

Stap 4 – De stroom door R₂.

De TinySA-ingang van 50 Ω staat parallel aan weerstand R3 van eveneens 50 Ω.
Hun vervangingsweerstand bedraagt:

25 Ω

Hierdoor wordt de stroom door deze parallelschakeling:

$$I = \frac{U_{\text{TinySA}}}{25}$$

Omdat R_2 in serie staat met deze parallelschakeling loopt exact dezelfde stroom eveneens door R_2 .

Stap 5 – De spanning over R_2 .

De spanning over R_2 is gelijk aan het verschil tussen de uitgangsspanning van de zender en de spanning op de meetuitgang. dus:

$$U_{R2} = U_{\text{zender}} - U_{\text{TinySA}}$$

Stap 6 – De waarde van R_2 .

Volgens de wet van Ohm geldt:

$$R = \frac{U}{I}$$

Hieruit volgt:

$$R_2 = \frac{U_{\text{zender}} - U_{\text{TinySA}}}{U_{\text{TinySA}} / 25}$$

Na invullen van de beide spanningen ontstaat:

$$R_2 = \frac{\sqrt{Z_{\text{totaal}}} - \sqrt{50 \times 10^{-A/10}}}{\sqrt{50 \times 10^{-A/10}} / 25}$$

Deze vergelijking vormde de oorspronkelijke **Formule 2**.

3. Van twee vergelijkingen naar één vergelijking.

Tot nu toe zijn twee afzonderlijke vergelijkingen afgeleid.

De eerste vergelijking berekent de totale belastingimpedantie Z_{totaal} als functie van de onbekende weerstand R_2 .

De tweede vergelijking berekent juist de benodigde waarde van R_2 , waarbij dezelfde belastingimpedantie Z_{totaal} weer als invoer wordt gebruikt.

De beide vergelijkingen bevatten dus dezelfde twee onbekenden.

Enerzijds:

R_2

en anderzijds:

Z_{totaal}

Juist hierdoor was het noodzakelijk beide formules steeds afwisselend uit te rekenen, totdat de oplossing zich stabiliseerde.

De vraag die vervolgens vanzelf ontstaat is eigenlijk verrassend eenvoudig:

Is het mogelijk de tussenvariabele Z_{totaal} volledig uit de vergelijkingen te verwijderen, zodat uiteindelijk nog slechts één vergelijking in R_2 overblijft?

Wanneer dat lukt, is het gehele iteratieve proces niet langer nodig, de oplossing kan dan rechtstreeks worden berekend. Dat is precies wat in dit hoofdstuk wordt onderzocht.

We beginnen met Formule 1:

$$Z_{\text{totaal}} = \frac{50 \times (R_2 + 25)}{R_2 + 75}$$

en vullen deze rechtstreeks in in Formule 2.

De oorspronkelijke tweede vergelijking (= Formule 2) luidde:

$$R_2 = \frac{\sqrt{Z_{\text{totaal}}} - \sqrt{50 \times 10^{-A/10}}}{\sqrt{50 \times 10^{-A/10}} / 25}$$

Invullen van Formule 1 levert:

$$R_2 = \frac{\sqrt{\frac{50 \times (R_2 + 25)}{R_2 + 75}} - \sqrt{50 \times 10^{-A/10}}}{\sqrt{50 \times 10^{-A/10}} / 25}$$

Op dit punt bevat de vergelijking nog slechts één onbekende:

R2

De belastingimpedantie **Ztotaal** is volledig verdwenen.

Daarmee is de oorspronkelijke koppeling tussen beide vergelijkingen opgeheven.

Vanaf dit moment resteert uitsluitend nog een zuiver algebraïsch probleem.

De verdere uitwerking bestaat uit het stapsgewijs verwijderen van de wortels en het herleiden van de vergelijking tot een veelterm in **R2**.

Dat lijkt op dit moment misschien nog een tamelijk ingewikkelde opgave.

Tijdens de uitwerking blijkt echter dat de vergelijking zich aanzienlijk gunstiger gedraagt dan op grond van haar vorm verwacht zou mogen worden.

4. Algebraïsche uitwerking van de vergelijking.

In het vorige hoofdstuk zijn de twee oorspronkelijke vergelijkingen samengevoegd tot één enkele vergelijking waarin alleen de onbekende weerstand R_2 nog voorkomt.

Deze vergelijking luidt:

$$R_2 = \frac{\sqrt{\frac{50 \times (R_2 + 25)}{R_2 + 75}} - \sqrt{50 \times 10^{-A/10}}}{\sqrt{50 \times 10^{-A/10}} / 25}$$

Hoewel deze vergelijking op het eerste gezicht ingewikkeld lijkt, bestaat de verdere uitwerking uitsluitend uit gewone algebra.

Er worden geen benaderingen toegepast; iedere stap is exact.

Stap 1 – De noemer verwijderen.

De eerste stap bestaat uit het wegwerken van de breuk in de noemer.

Daartoe worden beide zijden van de vergelijking vermenigvuldigd met:

$$\frac{\sqrt{50 \times 10^{-A/10}}}{25}$$

Hierdoor ontstaat:

$$\frac{\sqrt{50 \times 10^{-A/10}}}{25} = \sqrt{\frac{50 \times (R_2 + 25)}{R_2 + 75}} - \sqrt{50 \times 10^{-A/10}}$$

Nu is de breuk verdwenen en blijft slechts één wortelterm aan de rechterzijde over.

Stap 2 – De constante wortelterm verplaatsen.

De tweede wortelterm staat rechts van het minteken.

Om alle worteltermen aan dezelfde zijde van de vergelijking te krijgen, wordt deze term aan beide zijden opgeteld.

Hierdoor ontstaat:

$$\frac{R_2 \times \sqrt{50 \times 10^{-A/10}}}{25} + \sqrt{50 \times 10^{-A/10}} = \sqrt{\frac{50 \times (R_2 + 25)}{R_2 + 75}}$$

Tot zover gebeurt niets bijzonders.

Er wordt eenvoudigweg aan beide zijden dezelfde grootte toegevoegd, precies zoals bij iedere gewone vergelijking.

Stap 3 – Gemeenschappelijke factor buiten haakjes brengen.

Aan de linkerzijde bevatten beide termen dezelfde wortelfactor:

Deze mag daarom buiten haakjes worden gebracht.

Net zoals:

$$ab + ac = a \times (b + c)$$

geldt hier:

$$\frac{R_2 \times S}{25} + S = S \times \left(1 + \frac{R_2}{25}\right)$$

waarbij:

$$S = \sqrt{50 \times 10^{-A/10}}$$

De vergelijking wordt daardoor:

$$\sqrt{\frac{50 \times (R_2 + 25)}{R_2 + 75}} = \sqrt{50 \times 10^{-A/10}} \times \left(1 + \frac{R_2}{25}\right)$$

Er is dus géén nieuwe bewerking uitgevoerd.

De linkerkzijde is uitsluitend anders geschreven door een gemeenschappelijke factor buiten haakjes te brengen.

Juist deze herschrijving maakt de volgende stap aanzienlijk eenvoudiger.

Stap 4 – Kwadrateren.

Nu beide zijden nog slechts één wortel bevatten, kan de vergelijking worden gekwadrateerd.

Hierdoor verdwijnen beide wortels in één bewerking.

Er ontstaat:

$$\frac{50 \times (R_2 + 25)}{R_2 + 75} = 50 \times 10^{-A/10} \times \left(1 + \frac{R_2}{25}\right)^2$$

De factor 50 komt links én rechts voor en kan direct worden weggedeeld.

Hiermee ontstaat:

$$\frac{R_2 + 25}{R_2 + 75} = 10^{-A/10} \times \left(1 + \frac{R_2}{25}\right)^2$$

Tot dit punt zijn uitsluitend:

- een vermenigvuldiging,
- een optelling,
- het buiten haakjes brengen van een gemeenschappelijke factor,
- en één kwadratering

uitgevoerd.

Er zijn nog geen benaderingen toegepast.

Deze vergelijking vormt het uitgangspunt voor de uiteindelijke gesloten oplossing.

5. Van de wortelvergelijking naar een veelterm.

Aan het einde van het vorige hoofdstuk was de vergelijking teruggebracht tot:

$$\frac{R_2+25}{R_2+75} = 10^{-A/10} \times \left(1 + \frac{R_2}{25}\right)^2$$

Vanaf dit punt bevat de vergelijking geen wortels meer.

De verdere uitwerking bestaat uitsluitend uit het wegwerken van de breuken en het uitwerken van de haakjes.

Stap 1 – De kwadraatterm uitwerken.

Eerst wordt de bekende algebraïsche formule die we ooit op school geleerd hebben:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

toegepast op het product rechts tussen haakjes, bij deze ‘wortelvergelijking’ afleiding, waarbij voor **a** en **b**, hierbij de waardes uit die ‘wortelvergelijking’ ingevuld worden:

$$a = 1$$

en:

$$b = \frac{R_2}{25}$$

Hieruit volgt:

$$\left(1 + \frac{R_2}{25}\right)^2 = 1 + \frac{2R_2}{25} + \frac{R_2^2}{625}$$

De vergelijking wordt daardoor:

$$\frac{R_2+25}{R_2+75} = 10^{-A/10} \times \left(1 + \frac{2R_2}{25} + \frac{R_2^2}{625} \right)$$

Stap 2 – De noemer aan de linkerzijde verwijderen.

Om ook de laatste breuk te laten verdwijnen, we willen de noemer links weghebben, worden beide zijden vermenigvuldigd met:

$$R_2 + 75$$

Hierdoor ontstaat:

$$R_2 + 25 = (R_2 + 75) \times 10^{-A/10} \times \left(1 + \frac{2R_2}{25} + \frac{R_2^2}{625} \right)$$

Nu staat nog slechts één product van twee haakjes aan de rechterzijde.

Stap 3 – Breuken verwijderen.

Nu willen we de noemers in de breuken tussen de haakjes aan de rechterzijde verwijderen, daarom vermenigvuldigen we de inhoud van dit gedeelte met **625**.

Dat geeft rechts:

$$625 \times \left(1 + \frac{2R_2}{25} + \frac{R_2^2}{625} \right) = 625 + 50 \times R_2 + R_2^2$$

Of gebruikelijker geschreven:

$$R_2^2 + 50 R_2 + 625$$

Omdat we de rechterzijde met **625** hebben vermenigvuldigd, moeten we de linkerzijde van de vergelijking eveneens met **625** vermenigvuldigen, dat geeft links:

$$625 \times (R_2 + 25) = 625 R_2 + 15625$$

Rechts:

$$10^{-A/10} \times (R_2 + 75) \times \left(1 + \frac{2R_2}{25} + \frac{R_2^2}{625}\right) = 10^{-A/10} \times (R_2 + 75) \times (R_2^2 + 50 R_2 + 625)$$

Hiermee ontstaat:

$$10^{-A/10} \times (R_2 + 75) \times (R_2^2 + 50 R_2 + 625) = 625 R_2 + 15625$$

Stap 4 – Het product uitwerken.

Nu werken we het product uit.

Eerst:

$$R_2 \times (R_2^2 + 50 R_2 + 625) = R_2^3 + 50 R_2^2 + 625 R_2$$

Daarna:

$$75 \times (R_2^2 + 50 R_2 + 625) = 75 R_2^2 + 3750 R_2 + 46875$$

Optellen geeft:

$$R_2^3 + 125 R_2^2 + 4375 R_2 + 46875$$

Hiermee wordt de vergelijking:

$$10^{-A/10} \times (R_2^3 + 125 R_2^2 + 4375 R_2 + 46875) = 625 R_2 + 15625$$

Stap 5 – Haakjes wegwerken.

We introduceren hier even een nieuwe variabele: **a**, voor het voorbeeld hieronder, waarbij deze **a** staat voor:

$$a = 10^{-A/10}$$

Nu gebruiken we de distributieve eigenschap op het product tussen haakjes links van het = teken van de vergelijking, hierbij geldt:

$$a (X + Y + Z + \dots) = aX + aY + aZ + \dots$$

Elke term wordt dus afzonderlijk vermenigvuldigd met deze **a** waarde, zodat we dan op het volgende uitkomen:

$$10^{-A/10} \times R_2^3 + 125 \times 10^{-A/10} \times R_2^2 + 4375 \times 10^{-A/10} \times R_2 + 46875 \times 10^{-A/10} = 625 R_2 + 15625$$

Hier is niets bijzonders gebeurd, alleen de haakjes zijn verdwenen.

Stap 6 – Alles naar de linkerkant brengen.

We willen de vergelijking in de standaardvorm:

$$\dots = 0$$

Daarvoor trekken we aan beide kanten 2 zaken af:

$$625 \times R_2$$

en:

$$15625$$

links van het = teken wordt dan:

$$10^{-A/10} \times R_2^3 + 125 \times 10^{-A/10} \times R_2^2 + 4375 \times 10^{-A/10} \times R_2 + 46875 \times 10^{-A/10} - 625 R_2 - 15625$$

rechts van het = teken wordt dan:

0

Stap 7 – Gelijksortige termen combineren.

Nu kijken we welke termen allebei een factor van **R2** bevatten, dat zijn:

$$4375 \times 10^{-A/10} \times R_2$$

en:

$$- 625 R_2$$

Daar kunnen we **R2** buiten haakjes werken, dus:

$$4375 \times 10^{-A/10} \times R_2 - 625 R_2 = (4375 \times 10^{-A/10} - 625) \times R_2$$

Dat is precies dezelfde truc als:

$$5 X - 2 X = (5 - 2) X$$

Alleen staat er nu geen: **5** maar:

$$4375 \times 10^{-A/10}$$

Stap 8 – Eindresultaat.

Nu krijgen we:

$$10^{-A/10} \times R_2^3 + 125 \times 10^{-A/10} \times R_2^2 + (4375 \times 10^{-A/10} - 625) \times R_2 + 46875 \times 10^{-A/10} - 15625 = 0$$

We gaan vanaf nu de formules en algebraïsche constructies in een wat eenvoudiger vorm noteren, dat leest leest veel logischer en de zaken zijn ook eenvoudiger te volgen daarna:

- Alle **x** vermenigvuldigings tekens laten we weg vanaf nu, dit leidt alleen maar af, leest lastiger. vooral bij dit soort lange wiskundige vormen en voegt ook niets fundamenteels toe. Los hiervan hebben we ook het voordeel dat we de hoofdletter **X** nu kunnen gaan gebruiken voor een nieuwe onbekende, waarbij nu geen verwarring kan ontstaan met het **x** teken, als vermenigvuldigingsteken.
- We introduceren vanaf nu hier een nieuwe variabele: **a**. Deze variabele gebruiken we in de plaats van die vaak voorkomende dB verzwakkingswaarde **A** als exponent in de 'macht van 10' constructie: **10 tot de macht (-A / 10)**
In formulevorm:

$$a = 10^{-A/10}$$

Dit leest veel logischer, we weten door deze kleine **a** als vervangend symbool te gaan gebruiken, dat dit eigenlijk voor die 'macht van 10 constructie' staat, ook met deze: **-A/10** exponent, waarbij **A** dan de gewenste dB verzwakkingswaarde is.

Wat hebben we eigenlijk gedaan:

1. Haakjes weggewerkt door alles met **a** te vermenigvuldigen, dus met: $10^{-A/10}$.
2. Alles naar één kant van het = teken gebracht.
3. Gelijksortige termen samengenomen.
4. De leesbaarheid van de wiskundige vormen verbeterd door vanaf nu, die nieuwe **a** variabele te gaan gebruiken en ook vanaf nu, het weglaten van de **x** als vermenigvuldigingsteken.

Geen nieuwe wiskunde dus.

Het huidige eindresultaat van de formule ziet er daardoor als volgt uit, wat een heel stuk prettiger leest:

$$aR_2^3 + 125aR_2^2 + (4375a - 626) R_2 + 46875a - 15625 = 0$$

Op het eerste gezicht lijkt dit te leiden tot een derdegraads vergelijking.

Tijdens de verdere uitwerking zal echter blijken dat de hoogste machten elkaar onverwacht op een bijzonder eenvoudige wijze laten reduceren.

6. Een slimme substitutie.

Tot nu toe hebben we de vergelijking herleid tot:

$$aR_2^3 + 125aR_2^2 + (4375a - 626)R_2 + 46875a - 15625 = 0$$

Op dit punt valt iets op, vrijwel alle coëfficiënten zijn veelvouden van machten van vijf:

25, 625, 15625, ...

Dat is geen toeval, de oorspronkelijke schakeling is immers opgebouwd rond een karakteristieke impedantie van 50 Ω , en je ziet ook in de 1e vergelijkingen het getal 25 voortdurend terugkomen (= 2 x 50 Ω parallel = de impedantie van de uitgang van de schakeling).

Daarom kiezen we deze op het 1e gezicht wel logische substitutie:

$$R_2 = 25 X$$

Hierbij is **X** een nieuwe onbekende.

Deze keuze maakt de vergelijking aanzienlijk eenvoudiger.

Aan de rechterkant van de vergelijking staat nu alleen **0**. Dit heeft het voordeel dat we links met alles kunnen vermenigvuldigen of delen, terwijl rechts dan gewoon altijd **0** blijft staan. In principe vermenigvuldigen of delen we rechts natuurlijk met hetzelfde getal als links, maar **0** / **iets** of **0 x iets** blijft natuurlijk gewoon altijd **0**. (zolang dat **iets** geen **0** is want delen door **0** mag niet).

Stap 1 – De machten vervangen.

Uit:

$$R_2 = 25 X$$

volgt onmiddellijk:

$$R_2^2 = (25 X)^2 = 625 X^2$$

en:

$$R_2^3 = (25 X)^3 = 15625 X^3$$

Nu vervangen we iedere **R2** in de vergelijking door de hiervoor verkregen waardes van **X**.

Stap 2 – Invullen.

De eerste term wordt:

$$aR_2^3 = a (15625 X^3) = 15625 a X^3$$

De tweede term wordt:

$$125 a R_2^2 = 125 a (625 X^2) = 78125 a X^2$$

De derde term wordt:

$$(4375 a - 625) R_2 = (4375 a - 625) (25 X)$$

Nu halen we de vermenigvuldigfactor **25** en de **X** buiten de haakjes uit dit gedeelte:

$$25 (4375 a - 625) X$$

Dit wordt dan weer:

$$109375 a X - 15625 X$$

De laatste twee termen blijven ongewijzigd omdat er geen **R2** in zit, dus ook geen substitutie met **25 X** waardoor er hier in niets verandert, deze twee termen blijven daarom:

$$46875a - 15625$$

Hiermee ontstaat:

$$15625 a X^3 + 78125 a X^2 + 109375 a X - 15625 X + 46875 a - 15625 = 0$$

Stap 3 – Alles delen door 15625.

Nu zien we dat **iedere term deelbaar is** door **15625**.

Daarom delen we **de gehele vergelijking** zowel links én rechts door **15625**, dit geeft:

$$aX^3 + 5aX^2 + 7aX - X + 3a - 1 = 0$$

De derde term kan nog iets netter worden geschreven omdat beide termen **X** bevatten, geldt hier:

$$7aX - X = (7a - 1) X$$

Daarmee ontstaat:

$$aX^3 + 5aX^2 + (7a - 1) X + 3a - 1 = 0$$

Waarom is deze substitutie zo handig?

Door:

$$R_2 = 25 X$$

te kiezen verdwijnen de grote getallen vrijwel volledig uit de vergelijking.

In plaats van coëfficiënten als:

- **109375**
- **78125**
- **15625**

blijven alleen de veel eenvoudiger getallen:

- **1**
- **3**
- **5**
- **7**

over.

Dat maakt de structuur van de derdegraads vergelijking veel duidelijker, wat het ideale uitgangspunt vormt voor de verdere oplossing.

7. De ontbinding van de derdegraads vergelijking.

Na de substitutie:

$$R_2 = 25 X$$

werd de vergelijking teruggebracht tot:

$$aX^3 + 5aX^2 + (7a - 1)X + 3a - 1 = 0$$

Op het eerste gezicht lijkt dit nog steeds een gewone derdegraadsvergelijking.

Toch blijkt dat deze vergelijking een verrassend eenvoudige structuur bezit.

Zoeken naar een gemeenschappelijke factor.

Bij veel derdegraadsvergelijkingen is het mogelijk om de vergelijking te ontbinden in een lineaire factor en een tweedegraadsfactor.

Een veelgebruikte kandidaat is:

$$(X + 1)$$

omdat deze factor correspondeert met het nulpunt:

$$X = -1$$

Om te controleren of dit werkelijk een factor is, voeren we een **polynomiale deling** (ook wel synthetische deling of Horner-deling genoemd) uit.

Polynomiale deling:

We delen:

$$aX^3 + 5aX^2 + (7a - 1)X + 3a - 1 = 0$$

door:

$$(X + 1)$$

We schrijven eerst de coëfficiënten op:

$$a, 5a, (7a - 1), (3a - 1)$$

Omdat de deler:

$$(X + 1)$$

is, gebruiken we het nulpunt:

$$X = -1$$

Stap 1.

De eerste coëfficiënt wordt rechtstreeks overgenomen:

$$a$$

Stap 2.

Vermenigvuldig deze met:

$$-1$$

Dat geeft:

$$-a$$

Tel deze op bij de volgende coëfficiënt:

$$5a - a = 4a$$

Stap 3.

Vermenigvuldig opnieuw met:

$$-1$$

Dat geeft:

$$-4a$$

Tel deze op bij de volgende term:

$$(7a - 1) - 4a = 3a - 1$$

Stap 4 (controle).

Vermenigvuldig opnieuw met:

$$-1$$

Dat geeft:

$$-(3a - 1)$$

Tel dit op bij de laatste coëfficiënt:

$$(3a - 1) - (3a - 1) = 0$$

De rest is dus exact nul.

Dat betekent dat de deling volledig opgaat.

Resultaat van de ontbinding.

Omdat de rest nul is, weten we dat:

$$(X + 1)$$

inderdaad een factor van de vergelijking is.

De derdegraadsvergelijking kan daarom geschreven worden als:

$$(X + 1) (aX^2 + 4aX + 3a - 1) = 0$$

Hiermee is de derdegraadsvergelijking teruggebracht tot een veel eenvoudiger vorm.

Welke factor is voor ons van belang?

Uit de eerste factor volgt onmiddellijk:

$$X = -1$$

Omdat:

$$R_2 = 25X$$

zou dit betekenen:

$$R_2 = -25 \Omega$$

Wiskundig is dat een geldige oplossing.

Negatieve weerstanden komen zelfs voor in actieve elektronische schakelingen, zoals negatieve-impedantieomzetters en sommige speciale componenten.

Voor een **passieve weerstand** in een **TT-verzwakker** is deze oplossing echter niet realiseerbaar en daarom niet bruikbaar.

Voor onze toepassing blijft dus alleen de tweede factor over:

$$aX^2 + 4aX + 3a - 1 = 0$$

En daarmee is de oorspronkelijke derdegraadsvergelijking onverwacht teruggebracht tot een gewone tweedegraadsvergelijking.

In het volgende hoofdstuk lossen we deze op met de bekende **ABC-formule**.

8. De gesloten formule.

Na de ontbinding van de derdegraadsvergelijking blijft uiteindelijk alleen nog de tweedegraadsvergelijking over:

$$aX^2 + 4aX + 3a - 1 = 0$$

Dit is een gewone tweedegraadsvergelijking van de vorm:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

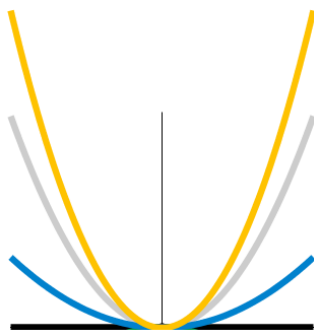
Daarin herkennen we onmiddellijk:

- * $A = a$

- * $B = 4a$

- * $C = 3a - 1$

Nu kunnen we de bekende **ABC-formule** toepassen:



$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Invullen geeft:

$$X = \frac{-4a \pm \sqrt{(4a)^2 - 4a(3a - 1)}}{2a}$$

Stap 1 – De discriminant vereenvoudigen.

We werken eerst de uitdrukking onder het wortelteken uit:

$$(4a)^2 = 16a^2$$

Verder:

$$4a(3a - 1) = 12a^2 - 4a$$

Dus:

$$16a^2 - (12a^2 - 4a) = 4a^2 + 4a$$

We kunnen hier direct een factor **4** buiten haakjes halen:

$$4(a^2 + a)$$

De wortel wordt daardoor:

$$\sqrt{4(a^2 + a)} = 2\sqrt{a^2 + a}$$

De **ABC-formule** verandert nu in:

$$X = \frac{-4a \pm 2\sqrt{a^2 + a}}{2a}$$

Stap 2 – Teller en noemer vereenvoudigen.

Alle termen bevatten nu een factor **2**.

Die kan worden weggewerkt.

Hierdoor ontstaat:

$$X = \frac{-2a \pm \sqrt{a^2 + a}}{a}$$

Nu splitsen we de breuk op.

Dat geeft:

$$X = -2 \pm \frac{\sqrt{a^2 + a}}{a}$$

Stap 3 – De wortel vereenvoudigen.

Onder het wortelteken staat:

$$a^2 + a$$

Daar halen we een factor **a** uit:

$$a(a + 1)$$

Dus:

$$\sqrt{a^2 + a} = \sqrt{a(a + 1)}$$

Omdat:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$$

kunnen we schrijven:

$$\frac{\sqrt{a(a+1)}}{a} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{a+1}}{a}$$

Omdat:

$$a = \sqrt{a}\sqrt{a}$$

blijft uiteindelijk over:

$$\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

Daarmee wordt:

$$X = -2 \pm \sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

Stap 4 – De fysisch bruikbare oplossing.

Voor een passieve weerstand moet:

$$R_2 > 0$$

Daarom kiezen we uitsluitend het **plus-teken**.

De min-oplossing zou immers altijd een negatieve weerstand opleveren.
Dus:

$$X = -2 + \sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

Stap 5 – Terugsubstitueren.

We hadden eerder gekozen voor

$$R_2 = 25X$$

Dus:

$$R_2 = 25 \left(-2 + \sqrt{\frac{a+1}{a}} \right)$$

Nu gebruiken we de oorspronkelijke definitie:

$$a = 10^{-A/10}$$

Daaruit volgt:

$$\frac{1}{a} = 10^{A/10}$$

Dus:

$$\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} = 1 + 10^{A/10}$$

Hiermee ontstaat uiteindelijk de gesloten formule:

$$R_2 = 25 \left(\sqrt{1 + 10^{A/10}} - 2 \right)$$

 **Eureka!**

Na de volledige algebraïsche afleiding is de oorspronkelijke iteratieve berekening gereduceerd tot één enkele gesloten formule.

Deze levert exact dezelfde uitkomsten als de iteratieve methode, maar zonder enige iteratie of numerieke benadering.

Dat is precies de elegantie waar we vanaf het begin naar op zoek waren. 

9. Controle (Test Kees).

Tijdens de eerste controle leek bij lage verzwakkingen een klein verschil tussen de iteratieve methode en de gesloten formule aanwezig.

Nader onderzoek wees uit dat dit verschil uitsluitend werd veroorzaakt door een onvoldoende aantal iteraties in het bestaande Python programmaatje uit het 2e TinySA artikel over dit onderwerp.

Bij hoge verzwakkingen (≈ 30 dB en hoger) blijken circa 10 iteraties reeds voldoende voor volledige convergentie.

Voor lage verzwakkingen verloopt de convergentie aanzienlijk langzamer. In de uitgevoerde Python-controle bleek dat voor 5 dB en ook bij de allerlaagst mogelijke waarde 4,7713 dB, minimaal 33 iteraties noodzakelijk zijn om dezelfde numerieke nauwkeurigheid te bereiken als de gesloten formule.

Daarmee is bevestigd dat beide methoden exact equivalent zijn.

Deze is controle uitgevoerd met:

- Python.
- Hiper Calc Pro Professional.
- Texas Instruments TI-30X Solar.
- (historische referentie) Faber-Castell rekenliniaal.

Die laatste krijgt dan een eervolle vermelding:

"Kon de formule helaas niet tot in de gewenste nauwkeurigheid volgen, maar bevestigde wel de orde van grootte."



Zie de afbeeldingen op de volgende 2 bladzijden, welke de exact gelijke uitkomsten met beide methodes aantonen, tot 'tig' cijfers achter de komma nauwkeurig.

De 2 zwarte plaatjes links op de volgende bladzijde zijn gekopieerd vanaf een Python scriptje, wat op mijn Android telefoon draaide. Dit scriptje werkte met de bestaande 2 oude formules, iteratief 33x herhalend steeds...dwz: Eerst formule 1, dan formule 2, daarna weer formule 1, gevolgd door formule 2...enz...dit gebeuren 33x herhalend.

Daarnaast in het groen als vergelijkend materiaal, 21 plaatjes, gekopieerd vanaf een Hiper Calc Pro applicatie, eveneens draaiend op mijn Android telefoon, welke app daar puur en alleen met de nieuw gevonden enkele gesloten formule werkte.

Verkregen dB waardes via Python programma met gebruik van de 2 oorspronkelijke formules welke 33 keer iteratief aangesproken worden

```

← TAB ⋮
Voer 'S' in om het programma te stoppen.
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 4.7713
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 0.00037756647853676736 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 16.666834473145688 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 5
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 1.0041521604392316 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 17.107060220569505 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 10
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 32.915619758885 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 26.833752096446005 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 15
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 92.79087987701588 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 35.100501279733436 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 20
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 201.24689052802225 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 40.9501243788791 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 25
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 395.2722243308286 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 44.68393013523739 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 30
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 740.9646009778188 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 46.936141596088724 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 35
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 1356.0755803317393 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 48.253062218125145 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 40
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 2450.1249968751563 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 49.00995000124994 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 45
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 4395.768817207252 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 49.44081206114306 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 50
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 7855.733678792879 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 49.684770652848286 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 55

```

```

← TAB ⋮
Voer 'S' in om het programma te stoppen.
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 55
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 14008.55535823378 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 49.82248800559169 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 60
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 24950.012499996876 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 49.90009995000001 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 65
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 44406.99228023909 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 49.943797481366175 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 70
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 79006.94545705646 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 49.968387221817174 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 75
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 140535.3335204365 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 49.9822203678961 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 80
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 249950.00125 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 49.99000099995 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 85
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 444519.8532126573 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 49.99437690296698 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 90
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 790519.4154373795 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 49.99683782233825 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 95
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 1405803.3131981576 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 49.99822175221246 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 100
De meest ideale waarde voor R2 wordt: 2499950.000125 ohm
De zender ziet het dummyload dan als: 49.99900000999995 ohm
Gewenste dB verzwakking 4.7713 - 100, 'S'=(Stoppen): 105

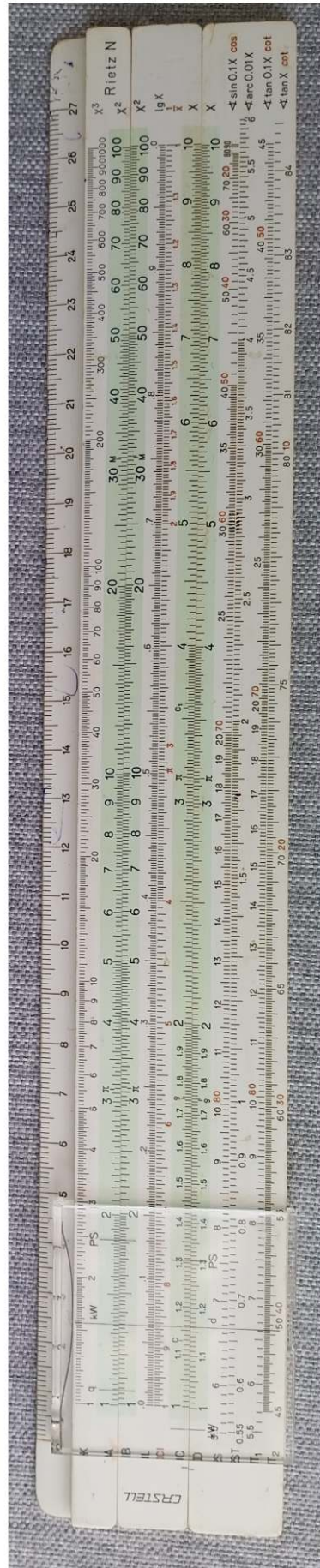
```

Verkregen dB waardes via Hiper Calc Pro app met gebruik van de enkele gesloten formule

$25 \times (\sqrt{1 + 10^{4.7713 \div 10}} - 2)$ $= 0.00037756647853$	$25 \times (\sqrt{1 + 10^{5 \div 10}} - 2)$ $= 1.00415216043922$
$25 \times (\sqrt{1 + 10^{10 \div 10}} - 2)$ $= 32.915619758885$	$25 \times (\sqrt{1 + 10^{15 \div 10}} - 2)$ $= 92.7908798770159$
$25 \times (\sqrt{1 + 10^{20 \div 10}} - 2)$ $= 201.246890528022$	$25 \times (\sqrt{1 + 10^{25 \div 10}} - 2)$ $= 395.272224330829$
$25 \times (\sqrt{1 + 10^{30 \div 10}} - 2)$ $= 740.964600977819$	$25 \times (\sqrt{1 + 10^{35 \div 10}} - 2)$ $= 1356.07558033174$
$25 \times (\sqrt{1 + 10^{40 \div 10}} - 2)$ $= 2450.12499687516$	$25 \times (\sqrt{1 + 10^{45 \div 10}} - 2)$ $= 4395.76881720725$
$25 \times (\sqrt{1 + 10^{50 \div 10}} - 2)$ $= 7855.73367879288$	$25 \times (\sqrt{1 + 10^{55 \div 10}} - 2)$ $= 14008.5553582338$
$25 \times (\sqrt{1 + 10^{60 \div 10}} - 2)$ $= 24950.0124999969$	$25 \times (\sqrt{1 + 10^{65 \div 10}} - 2)$ $= 44406.9922802391$
$25 \times (\sqrt{1 + 10^{70 \div 10}} - 2)$ $= 79006.9454570565$	$25 \times (\sqrt{1 + 10^{75 \div 10}} - 2)$ $= 140535.333520437$
$25 \times (\sqrt{1 + 10^{80 \div 10}} - 2)$ $= 249950.00125$	$25 \times (\sqrt{1 + 10^{85 \div 10}} - 2)$ $= 444519.853212657$
$25 \times (\sqrt{1 + 10^{90 \div 10}} - 2)$ $= 790519.41543738$	$25 \times (\sqrt{1 + 10^{95 \div 10}} - 2)$ $= 1405803.31319816$
$25 \times (\sqrt{1 + 10^{100 \div 10}} - 2)$ $= 2499950.000125$	



Nostalgische wetenschappelijke rekenmachine
Texas Instruments - TI-30X Solar



Super nostalgische Faber Castell rekenlineaal

10. Beschouwing.

Tijdens de afleiding van de gesloten formule zijn enkele onverwachte inzichten naar voren gekomen:

Eureka-moment 1 – De gesloten formule.

Het oorspronkelijke doel was uitsluitend een praktische iteratieve methode te ontwikkelen waarmee de waarde van weerstand **R2** kon worden berekend.

Tijdens de algebraïsche uitwerking bleek echter dat de twee iteratieve formules konden worden teruggebracht tot één enkele gesloten formule:

Hiermee werd de oorspronkelijke iteratieve methode vervangen door één directe berekening.

Eureka-moment 2 – Beide methoden zijn exact equivalent.

Aanvankelijk leek de gesloten formule bij lage verzwakkingen (rond 5 dB) een iets andere uitkomst te geven dan de iteratieve methode.

Nader onderzoek wees echter uit dat dit uitsluitend werd veroorzaakt door een te klein aantal iteraties.

Bij voldoende iteraties (voor 5 dB bleek minimaal 33 iteraties nodig) convergeren beide methoden exact naar dezelfde oplossing.

Daarmee is aangetoond dat de gesloten formule geen benadering is, maar exact dezelfde oplossing beschrijft als de oorspronkelijke iteratieve methode.

Eureka-moment 3 – De formule onthult haar eigen ondergrens.

Een onverwachte bijkomstigheid van de gesloten formule is dat zij tevens direct laat zien vanaf welke minimale verzwakking een passieve **π -verzwakker** van dit type überhaupt realiseerbaar is.

Bij kleinere verzwakkingen wordt de berekende waarde van **R2** negatief, hetgeen voor een passieve weerstand fysisch onmogelijk is.

Deze fundamentele ondergrens kwam niet voort uit een praktische meting, maar volgde rechtstreeks uit de wiskundige afleiding.

De gesloten formule luidt:

$$R_2 = 25 \left(\sqrt{1 + 10^{A/10}} - 2 \right)$$

Omdat een passieve weerstand nooit negatief kan zijn, moet gelden:

$$R_2 > 0$$

Dat betekent dat de uitdrukking tussen de haakjes positief moet zijn:

$$\sqrt{1 + 10^{A/10}} - 2 > 0$$

We brengen eerst de 2 naar de andere kant:

$$\sqrt{1 + 10^{A/10}} > 2$$

Omdat beide zijden positief zijn, mogen we beide zijden kwadrateren:

$$1 + 10^{A/10} > 4$$

Nu trekken we aan beide kanten 1 af:

$$10^{A/10} > 3$$

Om de exponent vrij te maken, nemen we aan beide kanten de **logaritme met grondtal 10**:

$$\frac{A}{10} > \log_{10}(3)$$

Tenslotte vermenigvuldigen we beide zijden met 10:

$$A > 10 \log_{10}(3)$$

of numeriek:

$$A > 4,77121254719662 \text{ dB}$$

Dit betekent dat een passieve **TT**-verzwakker volgens deze afleiding pas mogelijk is vanaf een verzwakking van **10 log(3)** oftewel boven de **4,77121254719662 dB** grens, afgerond **4,7713 dB** grens. Voor kleinere verzwakkingen zou de berekende waarde van **R2** negatief worden, en dat is voor een gewone passieve weerstand niet realiseerbaar.

De afleiding laat deze fundamentele ondergrens dus vanzelf zien.

Noot: Rond deze theoretische ondergrens van **4,77121254719662 dB** kunnen verschillende rekenprogramma's in de laatste decimalen minieme verschillen vertonen. Deze worden veroorzaakt door de interne implementatie van de wiskundige functies en floating-point afronding, en hebben geen praktische betekenis.

11. Conclusie.

Toepasbaarheid.

De afgeleide formule is uitsluitend geldig voor het in dit artikel beschreven dummyload-meetnetwerk.

Hoewel de vergelijking voor iedere gewenste dempingswaarde boven de 4,7713 dB een oplossing levert, wordt de totale belastingimpedantie bij kleine dempingswaarden steeds lager:

- Rond 34 dB bedraagt de belastingimpedantie nog ongeveer 48 Ω , hetgeen voor de meeste 50 Ω -zenders nog een acceptabele afwijking vormt.
- Bij 33 dB bedraagt de belastingimpedantie nog slechts ongeveer 47 Ω , waarna de impedantie bij nog kleinere dempingswaarden snel verder instort.

Hierdoor wordt het netwerk voor lage dempingswaarden ongeschikt als dummyload voor een 50 Ω -zender.

De praktische ondergrens ligt daarom rond 33 à 34 dB, hoewel de exacte grens uiteraard afhangt van de eisen die aan de impedantie-aanpassing worden gesteld.

En...ook niet onbelangrijk, verzwakkingswaardes kleiner dan 4,7713 dB zijn niet te realiseren bij dit type **π** -verzwakker schakeling.

Aanvullende conclusie.

Met de in dit artikel afgeleide gesloten formule kan de benodigde waarde van weerstand **R2** voortaan rechtstreeks worden berekend, zonder gebruik te maken van iteratieve berekeningen.

De afleiding heeft bovendien aangetoond dat deze gesloten formule exact equivalent is aan de oorspronkelijke iteratieve methode. Eventuele kleine verschillen die tijdens de controle werden waargenomen, bleken uitsluitend het gevolg te zijn van een onvoldoende aantal iteraties of van de numerieke afronding van verschillende rekenprogramma's.

Hiermee is een praktische, eenvoudig toepasbare én wiskundig verantwoorde oplossing verkregen voor de berekening van de **π -verzwakker** zoals toegepast in dit specifieke dummyload-meetnetwerk.

De oorspronkelijke iteratieve methode blijft uiteraard volledig bruikbaar en vormt tevens een onafhankelijke controle op de juistheid van de afgeleide gesloten formule.

12. Nawoord.

Tijdens het schrijven van dit artikel gebeurde er iets opmerkelijks. ChatGPT die de oorspronkelijke afleiding had gevonden, probeerde enkele dagen later dezelfde truc nog eens uit te voeren omdat ik hem dat opdroeg, met als reden er nog wat extra uitleg aan toe te voegen. Maar wat bleek nu: AI sloeg halverwege een geheel andere algebraïsche route in dan tijdens de eerdere oorspronkelijke afleiding. Die route was wiskundig geheel correct, maar leidde naar een algemene derdegraadsvergelijking (Cardano), terwijl de oorspronkelijke route rechtstreeks uitkwam op de elegante gesloten formule. Dankzij de bewaarde tussenstappen kon de oorspronkelijke afleiding worden teruggevonden en ook kon AI weer op het juiste spoor gezet worden.